



TITLE:

光子数の連続測定 : 情報と波束の収縮(特別寄稿)

AUTHOR(S):

上田, 正仁

CITATION:

上田, 正仁. 光子数の連続測定 : 情報と波束の収縮(特別寄稿). 物性研究
1992, 58(3): 235-255

ISSUE DATE:

1992-06-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/94914>

RIGHT:

特別寄稿

光子数の連続測定：情報と波束の収縮^{*}

上田 正仁

NTT 基礎研究所

〒180 東京都武蔵野市緑町3丁目9番11号

(1992年5月8日受理)

目次

1 はじめに—なぜ連続測定か?	236
2 連続測定の基礎	237
2.1 フォトンカウンターのモデル化	237
2.1.1 1光子検出過程	240
2.1.2 0光子検出過程	240
2.2 連続測定	241
3 連続測定による光子場の非ユニタリー時間発展	241
3.1 1光子検出過程	241
3.2 0光子検出過程	243
3.3 連続測定	243
3.4 連続測定における光子数の保存則	245
3.5 連続測定によって光子の密度演算子は混合状態になるか?	245
4 番犬効果	246
5 論理的可逆測定	248
5.1 連続測定と不完全測定	248
5.2 フォトンカウンティングにおける非可逆性の起源	249
5.3 連続的量子カウンター	250
5.4 論理的可逆性と情報の保存	251
6 シュレーディンガーの猫状態の発生	252
7 おわりに	253

^{*}) 本稿は、編集部の方から特にお願ひして執筆していただいた記事である。

1 はじめに—なぜ連続測定か？

光子数の測定は光電子増倍管があれば手軽に行なうことができるが、この測定過程（フォトンカウンティング）は量子力学的にはどのように記述されるのだろうか？

語を簡単にするために密度演算子 $\hat{\rho}_{\text{field}}$ で記述される状態にある光をフォトンカウンティングするとしよう[1]。図1に示すように光は完全な共振器に閉じ込められていて、これにあげられた小さな窓からもれてくる光をフォトンカウンティングするとする。検出器の時間分解能 Δt の間に2個以上の光子が検出されないよう窓の大きさは十分に小さくとると、出力は光電子パルスの時系列となる。このときの光の状態の時間発展の様子を示したのが図2である[2]。

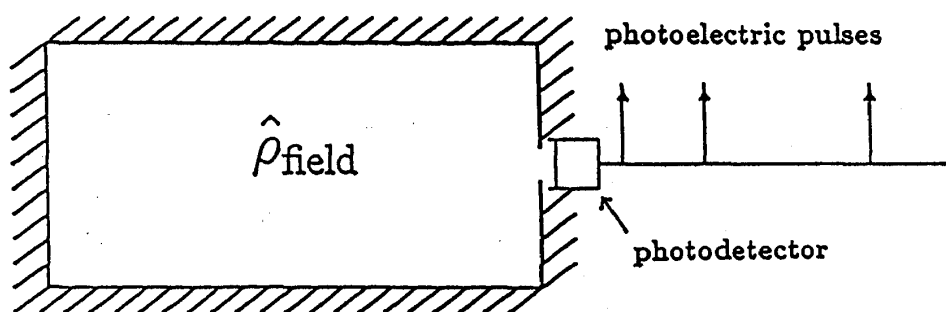


図1 共振器中の光に対するフォトンカウンティング

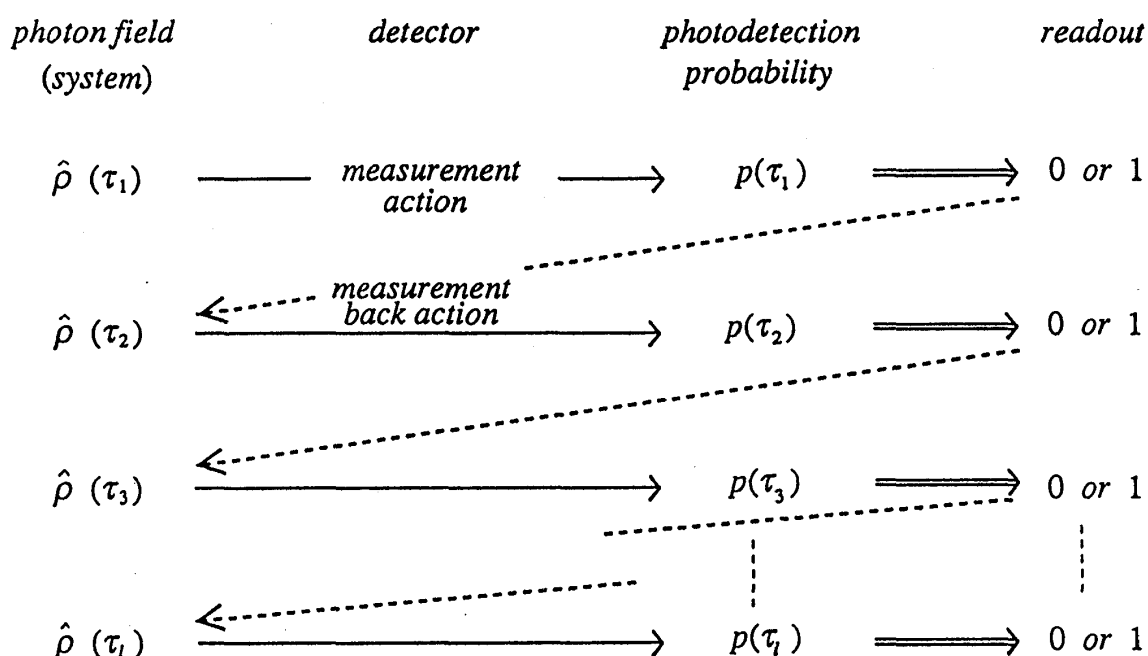


図2 連続測定における情報の読み出しと光子場の非ユニタリー時間発展

ある時刻の密度演算子 $\hat{\rho}(\tau_1)$ は同じ時刻に光子が検出される確率 $p(\tau_1)$ を与える。しかし、実際に光子が検出されるか否か(光電子変換が起こるか否か)は前もって予言することはできない(確率的に起こる)。ところが光子場の時間発展 $\hat{\rho}(\tau_1) \rightarrow \hat{\rho}(\tau_2)(\tau_2 = \tau_1 + \Delta t)$ は実際に光子が検出されたか否かで異なったものになる。このように光の状態が光電子変換の確率を与え、実際に光電子変換が起こったかどうかによって次の光の状態が決まるというサイクルが全測定時間にわたって($\Delta t \rightarrow 0$ の極限で)連続的に繰り返される。このように、フォトンカウンティングは光子数の連続測定の一例になっている。

従来のフォトンカウンティングの理論[3,4]では共振器内に閉じ込められた光子場と検出器とからなる全系は全測定時間にわたりユニタリー時間発展すると仮定される。そして測定直後の光の状態は von Neumann の projection postulate[5]を適用することによって得られる。ところが上に述べたように光電子変換が起こったか否かは全測定時間にわたりリアルタイムで読み出すことができるので、ユニタリー時間発展の描像は実際の光子場の時間発展を正しく記述しているとは言えない。以下では、フォトンカウンティングを記述するための理論的枠組が与えられ、これに基づいて情報の読み出しと波束の収縮の関係が様々な例について議論される。更に、フォトンカウンティングが非可逆な測定であるのはなぜか、また、可逆な測定は存在するか、存在するとしたらどういう意味で可逆的と言えるのかについて考察する。

2 連続測定の基礎

2.1 フォトンカウンターのモデル化

フォトンカウンティングは次のようにモデル化することができる[6]。下準位にある二準位原子を測定したい光が閉じ込められた共振器に時間 Δt ごとに次々と入射する。原子の上準位と下準位のエネルギー差は測定したい光子のエネルギーに一致するようにし、また各原子と光との相互作用時間は検出器の時間分解能 Δt に等しくとる。共振器から出てきた各原子のエネルギー準位を次々と測定することによって光が原子によって検出された(出てきた原子が上準位にある)か、検出されなかった(下準位にある)かを知ることができる(図3)。計算の最後で極限 $\Delta t \rightarrow 0$ をとることによって光子数の連続測定をシュミレートすることができる。

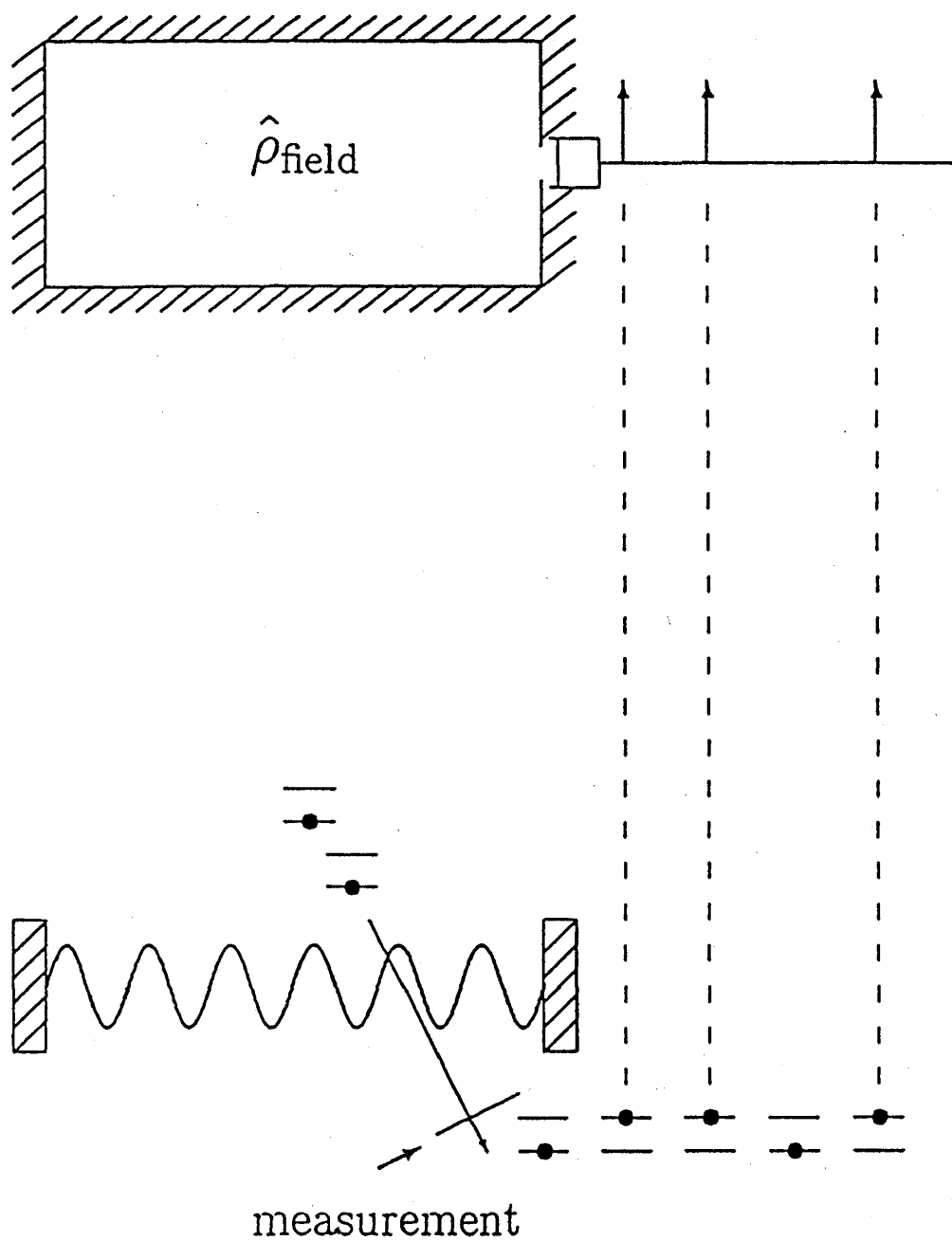


図3 フォトンカウンティングの物理的モデル

光の始状態を $\hat{\rho}_f(t_0)$ 、下準位にある原子の状態を $|g\rangle_a$ と書けば光と原子の合成系の始状態は次のように書ける。

$$\hat{\rho}_{a-f}(t_0) = \hat{\rho}_f(t_0) \otimes |g\rangle_a \langle g| \quad (1)$$

光と原子の相互作用として電気双極子相互作用を仮定すれば相互作用ハミルトニアンは次のように書ける。

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar g (\hat{a} \hat{\sigma}^\dagger + \hat{\sigma} \hat{a}^\dagger) \quad (2)$$

ここで \hat{a}^\dagger 、 \hat{a} は光子の生成、消滅演算子、 $\hat{\sigma}^\dagger$ 、 $\hat{\sigma}$ は原子の昇降演算子 ($\hat{\sigma}^\dagger |g\rangle_a = |e\rangle_a$ 、 $\hat{\sigma} |e\rangle_a = |g\rangle_a$ 、但し $|e\rangle_a$ は上準位にある原子の状態を示す)、 g は光と原子の結合定数である。合成系の状態の時間発展を Δt の 2 次までを相互作用表示で書けば次のようになる。

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{a-f}(t_0 + \Delta t) = & \hat{\rho}_{a-f}(t_0) + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} dt_1 [\hat{H}_{\text{int}}(t_1), \hat{\rho}_{a-f}(t_0)] \\ & + \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 [\hat{H}_{\text{int}}(t_1), [\hat{H}_{\text{int}}(t_2), \hat{\rho}_{a-f}(t_0)]] \\ & + O((\Delta t)^3) \end{aligned} \quad (3)$$

この式の右辺に (1) 式と (2) 式を代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{a-f}(t_0 + \Delta t) = & \hat{\rho}_{a-f}(t_0) + ig\Delta t [\hat{\rho}_f(t_0) \hat{a}^\dagger \otimes |g\rangle_a \langle e| - \hat{a} \hat{\rho}_f(t_0) \otimes |e\rangle_a \langle g|] \\ & + \frac{(ig\Delta t)^2}{2} \{ [\hat{\rho}_f(t_0) \hat{n} + \hat{n} \hat{\rho}_f(t_0)] \otimes |g\rangle_a \langle g| - 2\hat{a} \hat{\rho}_f(t_0) \hat{a}^\dagger \otimes |e\rangle_a \langle e| \} \\ & + O((\Delta t)^3) \end{aligned} \quad (4)$$

ここで $\hat{n} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a}$ は光子の数演算子である。

(4) 式は共振器内を原子が通過した直後の光と原子の合成系の状態を表わしている。この状態に対して原子の準位を測定した場合の光の状態変化は次の 2 通りに分かれる。

2.1.1 1 光子検出過程

共振器を通過後の原子が1光子を吸収して上準位にあった場合を1光子検出過程と呼ぼう。この時の光の状態は(4)式のうちで原子が上準位にある部分(すなわち $|e\rangle_a {}_a\langle e|$ に比例する部分) をとり出す(射影する) ことによって得られる。この部分を $J[\hat{\rho}_f(t_0)] \otimes |e\rangle_a {}_a\langle e| \Delta t$ と略記すると

$$J[\hat{\rho}_f(t_0)] = \lambda \hat{a} \hat{\rho}_f(t_0) \hat{a}^\dagger \quad (5)$$

が得られる(但し、 $\lambda \equiv g^2 \Delta t$)。従って1光子検出過程直後の光子場の密度演算子は(5)を規格化することによって得られる。

$$\hat{\rho}_f(t^+) = \frac{J[\hat{\rho}_f(t)]}{\text{Tr}\{J[\hat{\rho}_f(t)]\}} = \frac{\hat{a} \hat{\rho}_f(t) \hat{a}^\dagger}{\text{Tr}[\hat{\rho}_f(t) \hat{a}^\dagger \hat{a}]} \quad (1 \text{ 光子検出過程}) \quad (6)$$

ここで t^+ は $t + \Delta t$ で極限 $\Delta t \rightarrow 0^+$ をとった値を意味するものとする。

2.1.2 0 光子検出過程

共振器を通過後の原子が光子を吸収しないで下準位のまま通過した場合を0光子検出過程と呼ぼう。この時の光の状態は(4)式から原子が下準位にある部分(すなわち $|g\rangle_a {}_a\langle g|$ に比例する部分) をとり出すことによって得られる。この部分を $S_{\Delta t}[\hat{\rho}_f(t_0)] \otimes |g\rangle_a {}_a\langle g|$ と略記すると

$$S_{\Delta t}[\hat{\rho}_f(t_0)] = \exp\left(-\frac{\lambda}{2} \hat{n} \Delta t\right) \hat{\rho}_f(t_0) \exp\left(-\frac{\lambda}{2} \hat{n} \Delta t\right) \quad (7)$$

が得られる。このような0光子検出過程が有限な時間 $\tau = N \Delta t$ にわたって続いた場合の状態変化 $S_\tau[\hat{\rho}_f(t_0)]$ は(7)の $S_{\Delta t}$ を $\hat{\rho}_f(t_0)$ に N 回作用させることによって得られるから

$$S_\tau[\hat{\rho}_f(t_0)] = \exp\left(-\frac{\lambda}{2} \hat{n} \tau\right) \hat{\rho}_f(t_0) \exp\left(-\frac{\lambda}{2} \hat{n} \tau\right) \quad (8)$$

となる。従って、0光子過程が有限な時間間隔 τ だけ続いた直後の光子場の状態は(8)を規格化することによって次のように与えられる。

$$\hat{\rho}_f(t+\tau) = \frac{S_\tau[\hat{\rho}_f(t)]}{\text{Tr}\{S_\tau[\hat{\rho}_f(t)]\}} = \frac{\exp\left(-\frac{\lambda}{2} \hat{n} \tau\right) \hat{\rho}_f(t) \exp\left(-\frac{\lambda}{2} \hat{n} \tau\right)}{\text{Tr}[\hat{\rho}_f(t) \exp(-\lambda \hat{n} \tau)]} \quad (0 \text{ 光子検出過程}) \quad (9)$$

(5)式と(8)式はフォトンカウンティングの公理論的構成の出発点として Srinivas と Davies によって仮定されたものである[7]。ここではこれらをフォトンカウンティングの物理的モデルに基づいて導出した。

2.2 連続測定

フォトンカウンティングを時刻 $t = 0$ から $t = T$ まで行ったところ m 個の光子がそれぞれ時刻 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ で検出されたとしよう。このとき測定直後の光の密度演算子 $\hat{\rho}_m^{QPF}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m; 0, T)$ を求めよう (なお以下の議論では光に関する演算子しか現われないので光子場をあらわす密度演算子の下つきの添字 f を省略する)。時刻 $t = 0$ での光の密度演算子を $\hat{\rho}(0)$ と書けば、時刻 0 から τ_1 までは 0 光子検出過程が続き、 τ_1 で 1 光子が検出され、 τ_1 から τ_2 までは 0 光子検出過程が続き、時刻 τ_2 で 1 光子が検出される等々を (5) 式と (8) 式を繰り返し適用することで表わすと

$$\hat{\rho}_m^{QPF}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m; 0, T) = \frac{S_{T-\tau_m} J S_{\tau_m-\tau_{m-1}} J \cdots J S_{\tau_1} \hat{\rho}(0)}{\text{Tr} [S_{T-\tau_m} J S_{\tau_m-\tau_{m-1}} J \cdots J S_{\tau_1} \hat{\rho}(0)]} \quad (10)$$

が得られる[2, 8]。 \hat{a} と \hat{a}^\dagger の交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を用いて右辺の分子を計算すると

$$\begin{aligned} S_{T-\tau_m} J S_{\tau_m-\tau_{m-1}} J \cdots S_{\tau_1} \hat{\rho}(0) &= \lambda^m \exp \left(-\lambda \sum_{j=1}^m \tau_j \right) \exp \left(-\frac{\lambda}{2} \hat{a}^\dagger \hat{a} T \right) \\ &\quad \times \hat{a}^m \hat{\rho}(0) (\hat{a}^\dagger)^m \exp \left(-\frac{\lambda}{2} \hat{a}^\dagger \hat{a} T \right) \end{aligned} \quad (11)$$

となるので (10) 式は次のようになる。

$$\hat{\rho}_m^{QPF}(T) = \frac{\exp \left(-\frac{\lambda}{2} \hat{a}^\dagger \hat{a} T \right) \hat{a}^m \hat{\rho}(0) (\hat{a}^\dagger)^m \exp \left(-\frac{\lambda}{2} \hat{a}^\dagger \hat{a} T \right)}{\text{Tr} [\hat{\rho}(0) (\hat{a}^\dagger)^m \exp (-\lambda \hat{a}^\dagger \hat{a} T) \hat{a}^m]} \quad (12)$$

(11) 式で光子が検出された時刻を含む因子 $\exp \left(-\lambda \sum_{j=1}^m \tau_j \right)$ は (10) 式の分母と分子で打ち消し合うので、(12) 式は観測時間 T とその間に検出された光子数 m のみに依存する (従って $\hat{\rho}_m^{QPF}$ の引き数 τ_1, \dots, τ_m は省略した)。

3 連続測定による光子場の非ユニタリ一時間発展

これまでに導いた結果に基づいてフォトンカウンティングによって光子数分布がどのように時間発展するかを議論しよう[8]。

3.1 1 光子検出過程

フォトンカウンターが 1 光子を検出した直後の密度演算子は直前の密度演算子と (6) 式で関係づけられるが、これから 1 光子検出直後に共振器内に残った光

子数の平均値は

$$\langle n(t^+) \rangle = \text{Tr} [\hat{\rho}(t^+) \hat{n}] = \langle n(t) \rangle - 1 + \frac{\langle [\Delta n(t)]^2 \rangle}{\langle n(t) \rangle} \quad (13)$$

で与えられることが分かる。ここで $\langle n(t) \rangle = \text{Tr} [\hat{\rho}(t) \hat{n}]$ 及び $\langle [\Delta n(t)]^2 \rangle = \text{Tr} [\hat{\rho}(t) \hat{n}^2] - \{\text{Tr} [\hat{\rho}(t) \hat{n}]\}^2$ はそれぞれ1光子検出直前の光子数の平均値及び分散である。この結果は検出器が1光子を吸収する直前と直後の状態の平均光子数の差が1には等しくならず光子数分布の広がりを表す分散に依存することを示している。

唯一の例外は直前の状態が光子数確定状態の場合で、 $\langle [\Delta n(t)]^2 \rangle = 0$ となるので、 $\langle n(t^+) \rangle$ と $\langle n(t) \rangle$ の差はちょうど1に等しくなる。直前の状態がコヒーレント状態の場合は $\langle [\Delta n(t)]^2 \rangle = \langle n(t) \rangle$ となるので(13)式から $\langle n(t^+) \rangle = \langle n(t) \rangle$ が得られる。つまり、検出器が1光子を吸収したにもかかわらず、共振器内の平均光子は吸収前と比べて変化しない。特に、直前の状態が熱分布 (Bose-Einstein 分布) している場合の分散は $\langle [\Delta n(t)]^2 \rangle = \langle n(t) \rangle + \langle n(t) \rangle^2$ で与えられているから(13)式から $\langle n(t^+) \rangle = 2\langle n(t) \rangle$ 、つまり、検出器が1光子を吸収することによって残りの平均光子数が直前の場合に比べて2倍に増える!

この事情は次のように理解することができる。1光子検出直前の状態が真空状態と光子数100の状態が等しい確率で存在する混合状態であるとする密度演算子は

$$\hat{\rho}(t) = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |100\rangle\langle 100|)$$

で与えられる。従って、1光子検出直前の状態の平均光子数は50である。ところが真空状態では光子が検出される確率は0だから1光子が検出されたという情報からはじめの状態が光子数100の光子数状態であったと結論できる。従って、測定直後の状態はこれから1光子が吸収された光子数状態 $|99\rangle\langle 99|$ になり、平均光子数は50から99へほぼ倍増する。平均光子数が $\langle n \rangle$ の熱平衡状態の密度演算子は

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle n \rangle^n}{(1 + \langle n \rangle)^{n+1}} |n\rangle\langle n|$$

で与えられ、真空状態 $|0\rangle\langle 0|$ が最大の確率をもっている。この状態に対して1光子が検出されると、測定直後の状態はこの最大の確率が(6)式に従って他の光子数状態へ再分配され、その結果、残りの平均光子数が増える。他方、コヒーレント状態は消滅演算子の固有状態になっているために1光子検出過程の前後で状態は変化しない。故に、平均光子数も変化しない。

3.2 0 光子検出過程

時刻 t から $t + \tau$ までの間光子が検出されなかった場合の光の状態の変化は (9) 式で与えられる。このときの平均光子数の時間変化は

$$\langle n(t + \tau) \rangle = \text{Tr} [\hat{\rho}(t + \tau) \hat{n}] = \frac{\text{Tr} [\hat{\rho}(t) \hat{n} \exp(-\lambda \hat{n} \tau)]}{\text{Tr} [\hat{\rho}(t) \exp(-\lambda \hat{n} \tau)]}$$

で与えられる。 $\lambda \tau \ll 1$ として右辺を展開すれば 0 光子検出過程における平均光子数の時間発展を記述する微分方程式

$$\frac{d}{dt} \langle n(t) \rangle = -\lambda \langle [\Delta n(t)]^2 \rangle \quad (14)$$

が得られる。(14) 式は検出器が光子を吸収しないにもかかわらず共振器内に残った光子数の平均値が時間とともに減少することを示している。この理由は、0 光子検出過程が続くと光子数の大きい状態の確率が減少し、真空状態の確率が増えるように密度演算子が再規格化されるからである (このことは (9) 式が因子 $\exp(-\frac{\lambda}{2} \hat{n} \tau)$ を含んでいることからわかる)。唯一の例外は光子数確定状態で、このとき $\langle [\Delta n(t)]^2 \rangle = 0$ となるので平均光子数は時間的に変化しない。

3.3 連続測定

時刻 0 から T までフォトンカウンティングして m 個の光子が検出されたとする。このとき、測定直後に共振器内に残った光の密度演算子は (12) 式で与えられるので平均光子数の時間発展は

$$\langle n(T) \rangle_m = \text{Tr} [\hat{\rho}_m^{QPF}(T) \hat{n}] = \exp(-\lambda T) \frac{\text{Tr} [\hat{\rho}(0) (\hat{a}^\dagger)^{m+1} \exp(-\lambda \hat{n} T) \hat{a}^{m+1}]}{\text{Tr} [\hat{\rho}(0) (\hat{a}^\dagger)^m \exp(-\lambda \hat{n} T) \hat{a}^m]} \quad (15)$$

で与えられる。これを様々な初期状態について計算したものを図 4 に示す。光子は時刻 $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ に検出されたと仮定している。また点線は初期状態がコヒーレント状態の場合を示している。いずれの場合も測定が進むに従って共振器内の状態は真空状態へと近づいていくが、その近づき方は光の初期状態の統計性に強く依存していることがわかる。

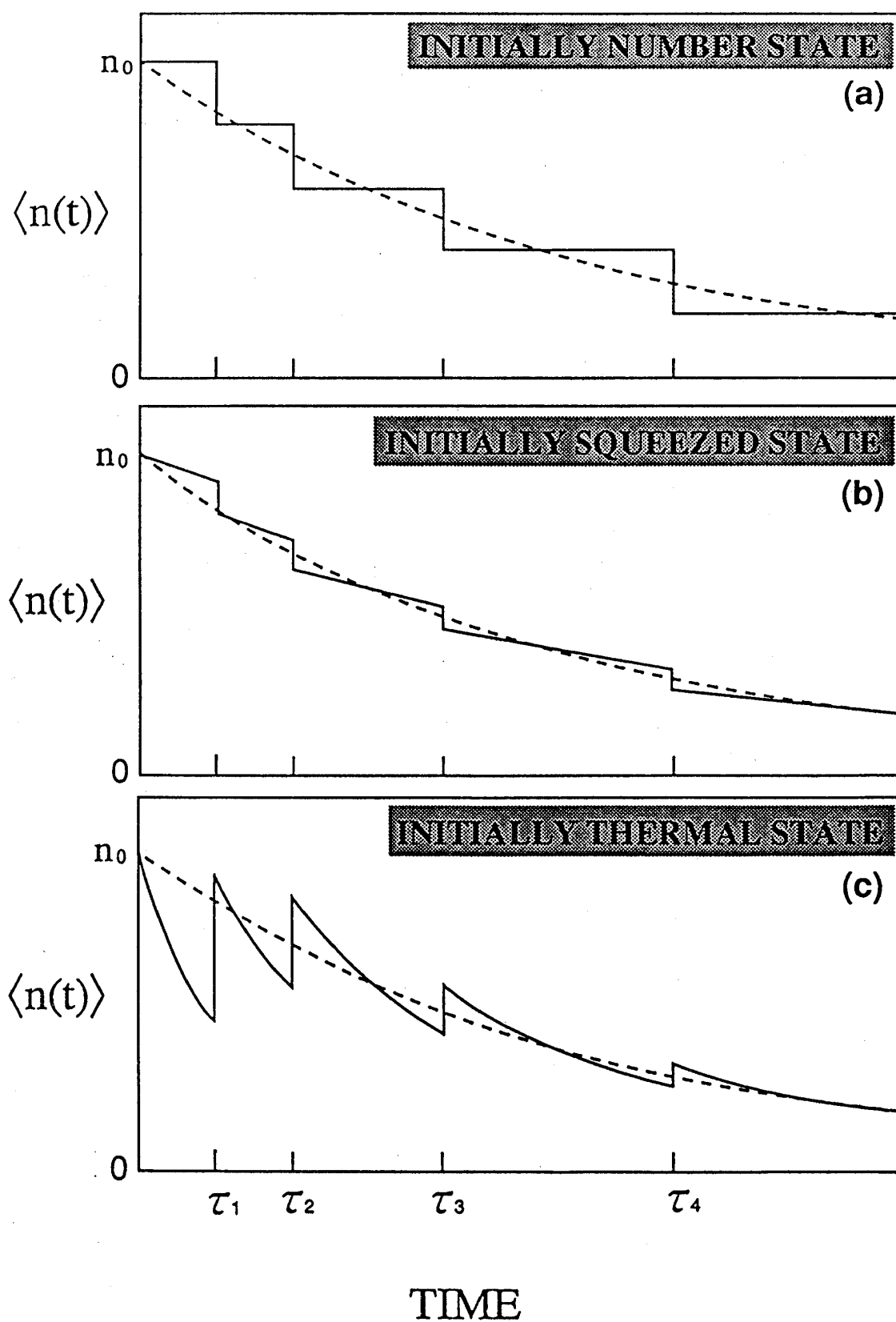


図4 連続測定による平均光子数の時間発展 (点線はコヒーレント状態)

3.4 連続測定における光子数の保存則

以上の議論から測定直前の平均光子数 n_0 と直後の平均光子数 $\langle n(T) \rangle_m$ の差が必ずしも検出器が実際に吸収した光子数 m に等しくなることを知った。これは数学的には m と $\langle n(T) \rangle_m$ の和が測定直前の平均光子数 $n_0 \equiv \text{Tr}[\hat{\rho}(0)\hat{n}]$ に必ずしも等しくなることを意味している。

$$m + \langle n(T) \rangle_m \neq n_0 \equiv \text{Tr}[\hat{\rho}(0)\hat{n}] \quad (16)$$

この理由は $\langle n(T) \rangle_m$ も n_0 も密度演算子で統計平均された量であるが m は一回の測定で(たまたま)吸収された光子数にすぎない(つまり、 m は統計平均された量ではない)ことによる。よく知られているように量子力学において保存される量は可能なすべての値について統計平均をとった量である。今の場合は(16)式の左辺を m について統計平均をとった量が保存量である。この場合の統計的重みは時刻0 から T の間に m 個の光子が検出される確率 $P(m; 0, T)$ である。この確率は(11)式のトレースを $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ のすべての可能な値について積分したものに等しい。

$$\begin{aligned} P(m; 0, T) &= \int_0^T d\tau_m \int_0^{\tau_m} d\tau_{m-1} \cdots \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \\ &\quad \times \text{Tr} [S_{T-\tau_m} J S_{\tau_m-\tau_{m-1}} J \cdots J S_{\tau_1} \hat{\rho}(0)] \\ &= \frac{(1 - e^{-\lambda T})^m}{m!} \text{Tr} [\hat{\rho}(0)(\hat{a}^\dagger)^m \exp(-\lambda \hat{n} T) \hat{a}^m] \end{aligned} \quad (17)$$

(15) 式および(17) 式から等式

$$\sum_{m=0}^{\infty} P(m; 0, T) [m + \langle n(T) \rangle_m] = n_0 \quad (18)$$

が成立することが証明できる。

以上の議論から明らかなように連続測定によって m と $\langle n(T) \rangle_m$ の和が最初の n_0 に比べて増えたり減ったりする理由は、最初に用意されたアンサンブル $\hat{\rho}(0)$ から測定時間 T とその間に検出された光子数 m で指定されるサブアンサンブル $\hat{\rho}_m^{QPF}(T)$ をとり出しこれに対して光子数の平均値 $\langle n(T) \rangle_m$ を計算したことにある。連続測定では読み出された情報に基づいて密度演算子が連続的に再規格化されるが、これは物理的には、はじめに用意された統計集団から、測定値に合致するような部分集合を次々にとり出す(射影する)ことを意味している。

3.5 連続測定によって光子の密度演算子は混合状態になるか？

光の初期状態が純粋状態にあると仮定しよう。このとき $\hat{\rho}(0)$ は状態ベクトル $|\psi\rangle$ を用いて $\hat{\rho}(0) = |\psi\rangle\langle\psi|$ と表わされる。このような始状態に対して連続測定を

行い時間 T の間に m 個の光子が検出されたとき、測定直後の状態は (12) 式から

$$\hat{\rho}_m^{QPF}(T) = \frac{\exp\left(-\frac{\lambda}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a}T\right)\hat{a}^m|\psi\rangle\langle\psi|(\hat{a}^\dagger)^m\exp\left(-\frac{\lambda}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a}T\right)}{\langle\psi|(\hat{a}^\dagger)^m\exp(-\lambda\hat{a}^\dagger\hat{a}T)\hat{a}^m|\psi\rangle} \quad (19)$$

で与えられる。ところで、ある状態が純粋状態であるか混合状態であるかは密度演算子が巾等条件 (2 乗がそれ自身に等しい) を満足するかどうかで判定できるが、(19) 式で与えられる $\hat{\rho}_m^{QPF}(T)$ は明らかにこの条件

$$[\hat{\rho}_m^{QPF}(T)]^2 = \hat{\rho}_m^{QPF}(T) \quad (20)$$

を満足している[9]。それ故に初期状態が純粋状態であれば連続測定によって状態は純粋状態を保ちつつづけ、混合状態にはならないことがわかる。

4 番犬効果

前節までの議論では検出器から読み出された情報 (光子検出の有無) をすべて使って密度演算子の時間発展が計算された。他方、読み出された情報を使うのも捨てるのも我々の自由である。では読み出された情報を計算に使わずに捨てた場合、状態はどの様に時間発展するだろうか? この問いは、測定を行っているときに測定結果を使って状態の時間発展を計算できる人とできない人にとって測定対象の状態変化が同じに見えるかどうかという問いと同じである。いずれの場合も対象 (共振器内の光) と検出器 (フォトンカウンタ) との相互作用 (物理的条件) は同じであるが両者が知りうる状態発展は以下に示すように全く異なったものになる。

検出器からの出力を読み出さない場合の密度演算子の時間発展は 1 光子検出過程と 0 光子検出過程からの寄与の統計和で表わされる。

$$\hat{\rho}(t+dt) = \text{Tr}\{J[\hat{\rho}(t)]\} dt \frac{J[\hat{\rho}(t)]}{\text{Tr}\{J[\hat{\rho}(t)]\}} + \text{Tr}\{S_{dt}[\hat{\rho}(t)]\} \frac{S_{dt}[\hat{\rho}(t)]}{\text{Tr}\{S_{dt}[\hat{\rho}(t)]\}} \quad (21)$$

ここで $\text{Tr}\{J[\hat{\rho}(t)]\} dt$ および $\text{Tr}\{S_{dt}[\hat{\rho}(t)]\}$ はそれぞれ 1 光子が dt の間に検出される確率とされない確率を表わしている (両者の和が dt の精度で 1 になることは容易に確かめることができる)。この式の右辺に (5) 式と (8) 式を代入すると次のような微分方程式が得られる。

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = \lambda\hat{a}\hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger - \frac{\lambda}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}(t) - \frac{\lambda}{2}\hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger\hat{a} \quad (22)$$

この方程式の解は

$$\hat{\rho}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-e^{-\lambda\tau})^k}{k!} \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a}\tau\right) \hat{a}^k \hat{\rho}(0) (\hat{a}^\dagger)^k \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a}\tau\right) \quad (23)$$

で与えられる。[2, 8]。この解を用いて共振器内に残った光子数の平均値を計算すると

$$\langle n(t + \tau) \rangle = e^{-\lambda\tau} \langle n(t) \rangle \quad (24)$$

となる。従って、平均光子数は光の初期状態にかかわらず単調に減少する。この結果は、図4に示した結果と著しく異なっている。この物理的理由は、検出器から読み出された情報をすべて捨てたためにフォトンカウンタは単なる線形吸収体になってしまったためであると解釈することができる。

共振器内に閉じ込められた光をフォトンカウンティングした場合、可能なすべての出力についてアンサンブル平均した効果は古典的な線形吸収体の効果と一致する。この結果はアンサンブル平均された運動方程式が古典論における運動方程式と一致することを主張する Ehrenfest の定理の一例になっている。

3-5 節で連続測定では純粋状態は純粋状態を保ったまま非ユニタリー時間発展し決して混合状態にはならないことを述べたが、読み出された情報を捨てた場合はどうなるだろうか。話を簡単にするために初期状態として光子数確定状態 $\hat{\rho}(0) = |n_0\rangle\langle n_0|$ をとろう。(23) 式を用いると密度演算子の時間発展を示す式

$$\hat{\rho}(\tau) = \sum_{m=0}^{n_0} \frac{n_0!}{m!(n_0-m)!} (1 - e^{-\lambda\tau})^m (e^{-\lambda\tau})^{n_0-m} |n_0 - m\rangle\langle n_0 - m| \quad (25)$$

が得られる。この結果は次のように解釈することができる。我々は検出器がフォトンカウンティングをしていることを知っているので、はじめ共振器の中にあった光子のうちのいくつかは各々確率 $p = 1 - e^{-\lambda\tau}$ で検出される。しかし、実際にいくつかの光子が検出されたかは知らないので、可能なすべての検出光子数について確率の重みをつけてたし合わせなければならない。よって(25) 式を得る。もし、読み出された情報を捨てないで実際に検出された光子数 m を知っていれば、測定後の状態は(25) 式のサブアンサンブル $\hat{\rho}(\tau) = |n - m\rangle\langle n - m|$ となりこれは純粋状態である。しかし、(25) 式は明らかに巾等条件(20) を満足せず混合状態になっている。このように、光子数の連続測定では本来読み出し可能な情報を捨てた場合にのみ被測定系は混合状態になる。但しコヒーレント状態は例外で混合状態にはならない。実際 $|\alpha\rangle$ を複素振幅が α のコヒーレント状態

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (26)$$

として $\hat{\rho}(0) = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ を(23) 式に代入すると

$$\hat{\rho}(\tau) = \left| \alpha \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\tau\right) \right\rangle \left\langle \alpha \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\tau\right) \right| \quad (27)$$

が得られる。これは複素振幅が時間的に減衰するコヒーレント状態を表している。(27) 式の時間発展は $\hat{\rho}(0)$ を読み出された情報を捨てない場合の式(12) に代

入して得られる時間発展と全く同じである。この物理的意味は次のように理解される。(23) 式で記述される状態の変化は透過率が p で与えられるビームスプリッターを透過する光の状態変化と一致する。ビームスプリッターを通過した光の量子状態が変化するのは空きポートから入射した真空場のゆらぎに起因すると考えられるが、コヒーレント状態は真空場と同種の量子ゆらぎを持っているために統計性をかえず振幅だけが減衰する。

5 論理的可逆測定

5.1 連続測定と不完全測定

量子力学における測定過程は非可逆であると言われるが、これは何を意味するのだろうか。例として粒子の位置の測定を考えよう(図5)。

測定前の波動関数 $\psi(q, t)$ は空間のある領域にまたがって存在している。測定器と粒子の結合が十分に強ければ測定直後の粒子の波束 $\psi(q, t^+)$ はある位置 q_0 に局在し直前の波動関数がもっていた粒子の位置の広がりに関する情報を完全に失ってしまう。従って測定直後の状態から直前の状態を回復することは不可能である。この意味で粒子と測定器の結合が十分に強い位置の測定は非可逆的であるといえる。

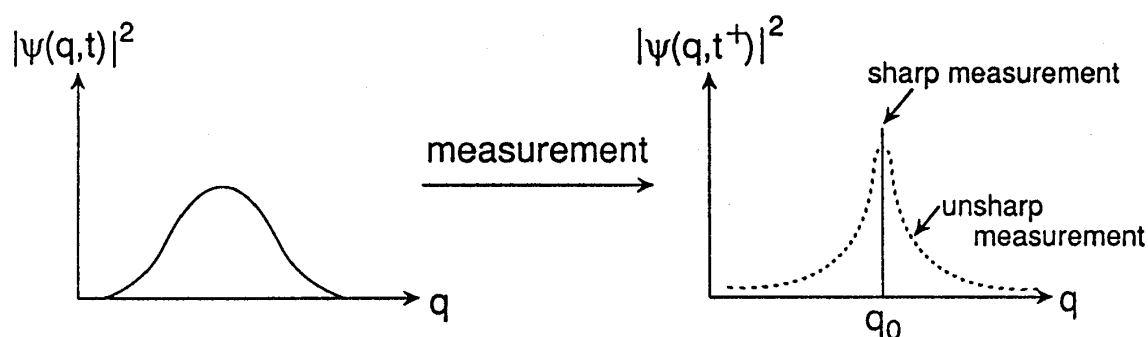


図5 測定による波束の収縮

ではこの結合があまり強くない場合はどういうことが起こるだろうか？この場合測定直後の波動関数はある中心位置 q_0 のまわりにゆるやかに広がったものになるだろう。このような結合のゆるやかな測定は不完全であることの代償として測定前の波動関数のもっていた広がり具合に関する情報をある程度保持している(図5の点線)。従って、測定器と被測定系の相互作用の種類と結合の強さ及び読み出された情報を知っていれば、測定後の波動関数から測定前の波動関数が計算できるかも知れない。このような計算が可能な測定を論理的可逆測定と呼ぶことにする[10]。

ある測定が論理的可逆であるためには不完全測定でなければならないが連続測定は測定時間が有限である限り不完全測定である。では、連続測定の一例であるフォトンカウンティングは論理的可逆な測定だろうか？答えは否である。その物理的起源を次に考察しよう。

5.2 フォトンカウンティングにおける非可逆性の起源

2節で述べたようにフォトンカウンティングは0光子検出過程と1光子検出過程から構成されるので各々の過程が論理的に可逆かどうかを調べればよい。

0光子検出過程における光の状態の時間発展は(9)式で与えられるがこの式は $\hat{\rho}(t)$ について逆に解くことができる。視察により

$$\hat{\rho}(t) = \frac{\exp\left(\frac{\lambda}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a}\tau\right)\hat{\rho}(t+\tau)\exp\left(\frac{\lambda}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a}\tau\right)}{\text{Tr}[\hat{\rho}(t+\tau)\exp(\lambda\hat{a}^\dagger\hat{a}\tau)]} \quad (28)$$

を得る。このように0光子検出過程はユニタリー的ではないが論理的には可逆である。この物理的理由は、0光子検出過程では状態は真空状態の確率を増加させるように演算子 $\exp\left(-\frac{\lambda}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a}\tau\right)$ によって再規格化されるが、この演算子はもとのいかなる状態をも消滅させないからである。

これに対して1光子検出過程は本質的に非可逆である。その理由は、(6)式に含まれる消滅演算子が測定前の状態の真空状態を消滅させてしまうからである。従って、測定後の状態 $\hat{\rho}(t+\tau)$ は測定前の状態 $\hat{\rho}(t)$ の真空に関する情報 $\rho_{0n} = \langle 0|\hat{\rho}(t)|n\rangle (n=0,1,2,\dots)$ を全て失っている。

このようにフォトンカウンティングが論理的可逆性をもたない物理的起源は1光子が検出されるたびにその直前の状態の真空に関する情報が失われることにあることがわかった。ある測定が論理的に可逆であるためには不完全測定であるだけでは十分ではなく、真空状態に対しても反応することが必要である。次にこのような測定モデルを考察しよう。

5.3 連続的量子カウンター

論理的可逆測定を行う検出器のモデルとして図6に示されたような系を考えよう。系はまず光ポンピング等によって準位 b に励起されるがまもなく無輻射的なエネルギー緩和によって準安定な状態 c に落ちつく。測定したい光のエネルギーが準位 c と d のエネルギー差に共鳴していれば、この系は光子に対しても真空場のゆらぎに対しても反応しそれぞれ誘導放出と自然放出を行う。こうして準位 d に落ちた系はさらに別の光子を放出して基底状態 a に落ちる。このとき放出された光をフォトンカウンティングすることによって観測者は誘導放出または自然放出が起こったことを知ることができる。

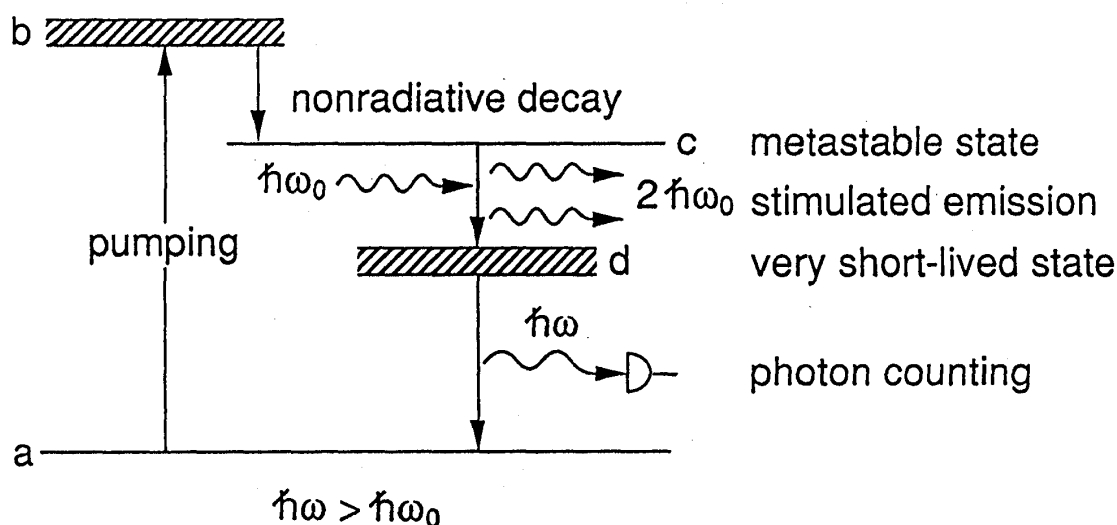


図6 量子カウンター

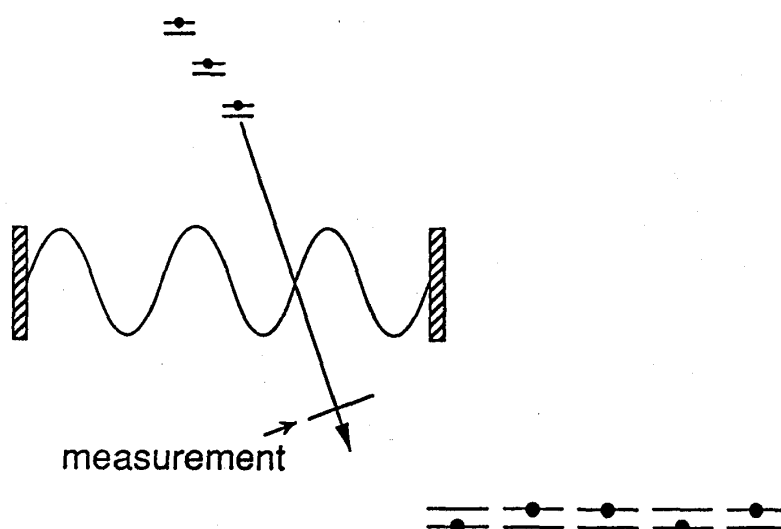


図7 連続的量子カウンティングの物理的モデル

このような系は希土類にしばしば見られ、最初、赤外カウンター ($\hbar\omega_0$ を赤外とし、 $\hbar\omega$ は可視とする) として提案されたが[11]、後にこのような測定が数学的には生成消滅演算子が antinormal order に並んだ相関関数の測定に対応していることが認識された[12](ちなみにフォトンカウンティングは normal order の相関関数の測定であるとも言える)。ここではこの系を論理的可逆測定を行う検出器として使う。この系の本質的な部分は準安定状態 c に励起された系を準備することにあるから、モデルとしては、上準位に励起した 2 準位原子を使おう (図 7)。この原子列を共振器の中に次々と入射して測定したい光と相互作用を行わせる。そして、出力した原子のエネルギー準位を測定することによって誘導放出または自然放出が起こったかどうかを調べる。

計算は 2 節で行った計算と全く同様にできるのでここでは結果だけを示そう。まず 0 光子検出過程における状態の時間発展はフォトンカウンティングの場合の結果 (9) 式に一致する。従って 0 光子検出過程は論理的に可逆である。1 光子検出過程の場合の状態変化は

$$\hat{\rho}(t^+) = \frac{\hat{a}^\dagger \hat{\rho}(t) \hat{a}}{\text{Tr}[\hat{\rho}(t) \hat{a} \hat{a}^\dagger]} \quad (29)$$

となる。フォトンカウンティングの場合と比較して生成演算子が $\hat{\rho}(t)$ の左側に作用しているから真空状態は消滅せず、(29) 式は逆に解ける。実際、視察により

$$\hat{\rho}(t) = \frac{(\hat{n} + 1)^{-1} \hat{a} \hat{\rho}(t^+) \hat{a}^\dagger (\hat{n} + 1)^{-1}}{\text{Tr}[\hat{\rho}(t^+) \hat{a}^\dagger (\hat{n} + 1)^{-2} \hat{a}]} \quad (30)$$

が得られる。こうして、連続的量子カウンターは論理的可逆測定を行うことが示された。

5.4 論理的可逆性と情報の保存

ある測定が論理的に可逆かどうかは被測定系のもっている情報が測定によって保存されるかどうかの判定となる。ある測定過程が論理的に可逆ならば、測定直後の密度演算子に含まれる情報量と読み出された情報量の和は測定前に系がもっていた情報量に等しくなる。いわゆるパウリの第一種測定に属するすべての測定過程とフォトンカウンティングなどの破壊測定、光カー効果を用いた光子数の量子非破壊測定等はすべて論理的に非可逆な測定である。このことから、波束の収縮を伴う量子力学的測定過程はすべて非可逆であると結論してしまいがちである。しかし、測定過程の可逆性を情報の保存という観点から見ればこの結論は必ずしも真ではなくなる。5-3 節で示した連続的量子カウンターはこの結論に対する一つの反例を与えている。

6 シュレーディンガーの猫状態の発生

本記事で主に取扱ったような平均光子数の時間変化を問題にする限り、これまでの議論はすべて古典的確率論の枠内で説明できる。その理由は、密度演算子の対角成分しか計算結果に影響しなかったからである。しかし、光子数の測定の反作用は実は非対角成分にも及んでいる。このことの顕著な例として、初期状態として強くスクイジングした光をとろう (図8 (a))。

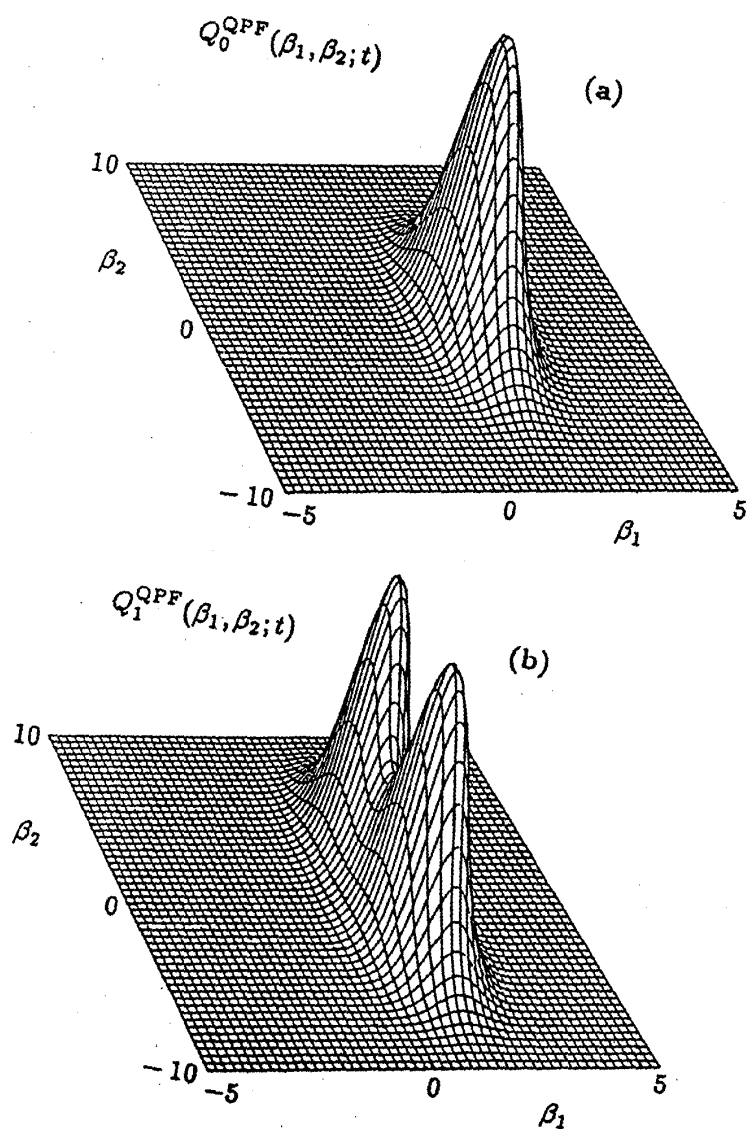


図8 フォトンカウンティングによる Schrödinger の猫状態の発生

このとき、一光子を検出した直後の光の状態を計算すると、位相平面上で2つの巨視的なピークをもった状態に分裂することがわかる(図8(b))。しかし、3-5節で一般的に示したようにこの状態は全体としては依然として純粋状態にあるので、Schrödingerの猫状態が発生したことになる[9]。これまでのSchrödingerの猫状態を作る提案[13-15]はいずれもまず(i)2つのモード間にユニタリー相互作用によって相関を作り、然る後に(ii)条件付測定を行うことによって重ね合わせの状態を作る、という手段が用いられていた。これとは対照的に連続測定による方法は光学的非線形相互作用が不必要でしかも単一モードの光から猫状態を作るという点がユニークである。また猫状態の発生に伴い光子統計がサブポアソンとスーパーポアソン状態の間を測定の反作用を受けて振動するという点でも特異である[16]。

7 おわりに

量子力学における測定のモデルは波束の収縮が一瞬で起こることを前提とする場合が多い。このような仮定が成立する観測過程は一般に射影演算子やprobability-operator measureといった道具だてて記述されることが知られている[17]。これに対してフォトンカウンティングでは測定が有限の時間にわたって連続的に行われるために、検出器と光との量子相関の形成と情報の読み出しに伴う密度演算子の射影が同時に進行するように理論を拡張する必要がある[18]。本記事ではこのような拡張された理論の枠内で共振器内の光の状態が測定の反作用を受けでどのように非ユニタリー時間発展するかをいくつかの典型的な初期状態(コヒーレント状態、熱的状态、光子数確定状態およびスクイズド状態)について詳しく分析した。

分析の過程で再確認されたことの一つは、密度演算子が被測定系に対して我々がもっている知識の不確定性を内包しているという事実である。連続測定によって密度演算子に連続的な射影を行うことは、読み出された情報によりよく合致するように我々の知識を時々刻々修正する(量子力学的情報処理)ことに他ならない。フォトンカウンターが一光子を吸収したにも関わらず、共振器内に残った平均光子数が必ずしも減少しない理由もここにある。

2節で示された連続測定の構成法は、フォトンカウンティングのような破壊測定に限らず、量子相関をもった系[19]や量子非破壊測定[20]の場合にも拡張することができる。また、共振器内に閉じこめられた孤立系だけに限らず、開放系のフォトンカウンティングへと拡張することも可能である[21]。他方、これらはすべて出力が離散的であり、位置の測定やホモダイン検波のように出力が連続値をとる場合への拡張については今後の研究をまたなければならない。

参考文献

1. 本論文では主としてフォトンカウンティングによって共振器中に残った光がどのように時間発展するかを論じる。出力される光電子パルスの分布—光電子統計—については次の文献を参照。
L. Mandel, in *Proceedings of the Symposium of Modern Optics*, edited by J. Fox (Polytechnic, New York, 1967), p. 143.
R. J. Glauber, in *Laser Handbook*, edited by F. T. Arecchi and E. O. Schulz-DuBois (North-Holland, Amsterdam, 1972), p. 1.
B. E. A. Saleh, *Photoelectron statistics* (Springer, Berlin, 1978).
M. Ueda, Phys. Rev. A **38**, 2937 (1988); A **40**, 1106 (1989).
2. M. Ueda, Quantum Opt. **1**, 131 (1989).
3. B. R. Mollow, Phys. Rev. **168**, 1896 (1968).
4. M. O. Scully and W. E. Lamb, Jr., Phys. Rev. **179**, 368 (1969).
5. J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (Princeton University, Princeton, 1955).
6. N. Imoto, M. Ueda, and T. Ogawa, Phys. Rev. A **41**, 4127 (1990).
7. M. D. Srinivas and E. B. Davies, Opt. Acta **28**, 981 (1981); **29**, 235 (1982).
8. M. Ueda, N. Imoto, and T. Ogawa, Phys. Rev. A **41**, 3891 (1990).
9. T. Ogawa, M. Ueda, and N. Imoto, Phys. Rev. A **43**, 6458 (1991).
10. M. Ueda and M. Kitagawa, unpublished.
11. N. Bloembergen, Phys. Rev. Lett. **2**, 84 (1959).
12. L. Mandel, Phys. Rev. **152**, 438 (1966).
13. B. Yurke and D. Stoler, Phys. Rev. Lett. **57**, 13 (1986).
14. A. Mecozzi and P. Tombesi, Phys. Rev. Lett. **58**, 1055 (1987).
15. B. Yurke, W. Schleich, and D. F. Walls, Phys. Rev. A **41**, 5261 (1991).
16. T. Ogawa, M. Ueda, and N. Imoto, Phys. Rev. Lett. **66**, 1046 (1991).

17. C. W. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory* (Academic, New York, 1976).
18. E. B. Davies, *Quantum theory of open systems* (Academic, New York, 1976).
19. M. Ueda, N. Imoto, and T. Ogawa, *Phys. Rev. A* **41**, 6331 (1990).
20. N. Imoto, M. Ueda, and T. Ogawa, in *Proceedings of the Symposium on the Foundation of Modern Physics*, edited by P. Lahti and P. Mittelstaedt (World Scientific, Singapore, 1991); M. Ueda, N. Imoto, H. Nagaoka, and T. Ogawa, *Phys. Rev. A*, to be published.
21. M. Ueda, *Phys. Rev. A* **41**, 3875 (1990).